

BTS GEMEAU : Correction du contrôle de topographie du 25 mars 2004.

A partir du 1er document joint en annexe (grille de points superposée au plan), déterminer la surface de la "parcelle d'exercice" du Domaine de Donadille.

Préciser :

**le nombre de points intérieurs,
le nombre de points en limite,
et la surface (en m²) correspondant à un point.**

Pour le plan au 1/500 : il y a 758 points intérieurs et 7 points en limite.

1 point correspond à un carré de 2,5 m x 2,5 m, soit 6,25 m².

La surface est donc de $(758 + 7/2) \times 6,25 = 4759 \text{ m}^2$.

Pour le plan au 1/2000 : il y a 741 points intérieurs et 8 points en limite.

1 point correspond à un carré de 10 m x 10 m, soit 100 m².

La surface est donc de $(741 + 8/2) \times 100 = 74500 \text{ m}^2$.

A partir du 2ème document joint en annexe (coordonnées géographiques de St 1 et St 25 + mesures faites avec un théodolite depuis St 1, puis depuis St 2),

**Déterminer la distance St 1 -> St 25
et l'orientation (gisement géographique) de cette direction.**

Les points St 1 et St 25 sont connus tous les 2 par leurs coordonnées planimétriques (x, y).

Ils permettent donc de situer la direction de référence qu'est le Nord géographique.

Je fais un croquis situant ces 2 points dans le plan, le Nord géographique et le gisement de la direction St 1 - St 25.

Sur ce croquis, je m'aide du tracé d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est St 1 – St 25 et dont les côtés (parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées) représentent :

- la variation d'abscisse pour l'un (1107,297 – 1040,16)
- et la variation d'ordonnée pour l'autre (2107,586 – 2026,92)

entre les 2 stations (1 et 25).

J'applique pythagore et je trouve 104,949 m.

Connaissant maintenant les 3 côtés du triangle rectangle, et sachant que le côté vertical représente la variation d'ordonnée et donc l'orientation du Nord géographique,

Je peux trouver le sinus, le cosinus ou la tangente de l'angle en le Nord géographique et la visée de St 1 vers St 25. Cet angle est le gisement géographique de la visée.

Ex : le cosinus vaut 0,76862. Le gisement cherché vaut donc 44,189 grades.

Compléter le tableau des mesures faites à partir de la station St 1.

Distances horizontales

Elles sont obtenues à partir des visées stadimétriques (FSH – FSB), corrigées en fonction de l'inclinaison de la lunette du théodolite.

$D_h = (FSH - FSB) \times 100 \times (\sin(V))^2$,

Soit $D_h = (2162 - 1440) \times 100 \times (\sin(105,777))^2$ entre St 1 et St 3.

En divisant par 1000 le résultat pour l'avoir en mètres, on trouve 71,607 m.

Nota : pour la distance St 1 – St 25, on trouve 104,918 m, soit 3 cm de moins que ce qui a été trouvé à partir des coordonnées de ces points. Les mesures faites sont donc précises.

Dénivelées et altitude

Du point de Station au point visé, les 3 composantes de la dénivelée sont :

- la hauteur tourillon (Ht) qui est positive parce qu'on monte à partir du sol pour atteindre la hauteur de la lunette ;
- la dénivelée de la ligne de visée (Δz) qui est positive quand la lunette vise encore plus haut ($V < 100$ grades) et négative quand la lunette vise vers le bas ($V > 100$ grades) ;
- la lecture au fil niveleur est à compter négativement car il faut descendre du point visé sur la mire jusqu'au sol pour arriver à l'altitude du point sur lequel la mire est posée. Cette lecture au fil niveleur étant faite en mm, il faut la diviser par 1000 pour obtenir un résultat en mètres.

Pour la visée de St 1 à St 3 cela nous donne :

- hauteur tourillon : + 1,56 mètre ;
- dénivelée de la ligne de visée : $\Delta z = (FSH - FSB) \times 100 \times \sin(V) \times \cos(V)$
soit $(2162 - 1440) \times 100 \times \sin(105,777) \times \cos(105,777)$
divisé par 1000 pour avoir un résultat en mètres : - 6,516 mètres ;
- la descente au sol à partir du fil niveleur : $- 1801/1000 =$ - 1,801 mètres.

Pour trouver les altitudes, de la station 1 aux stations visées, il faut totaliser les 3 composantes de la dénivelée pour les ajouter à l'altitude de la station 1.

Or l'altitude de St 1 n'est pas connue ; on ne connaît que celle de St 25.

Comme altitude (St 25) = altitude (St 1) + Ht + Δz – FN (vers St 25),
on trouve altitude (St 1) = $51,501 - 1,56 - 2,929 + 1,343 =$ 48,355 mètres.

Et pour St 3 : altitude = $48,355 + 1,56 - 6,516 - 1,801 =$ 41,598 mètres

Gisements géographiques

Les angles horizontaux (Hz) lu sur le théodolite sont mesurés à partir d'une direction 0 qui n'est pas précisée, mais je connais l'orientation géographique d'une des visées : la visée de St 1 à St 25 : 44,189 grades, pour un angle lu de 166,628 grades.

Ce dernier angle me permet de compléter mon croquis en faisant figurer la « direction 0 ». J'en déduis par ailleurs que pour obtenir le gisement géographique des directions visées depuis St 1, je dois retirer (166,628 – 44,189 soit 122,439 grades).

Pour ne pas conserver de valeur négative pour le gisement St 1 vers St 25, j'ajoute 400 grades, ce qui ne modifie en rien l'orientation de ma cette visée : 20,302 – 122,439 = -102,137 grades, (+400 = 297,863 grades).

Coordonnées planimétriques

Connaissant la longueur des visées et leur orientation dans le repère géographique x,y, je peux calculer les variations d'abscisse (Δx) et d'ordonnées (Δy) correspondant à ces visées :

$$\Delta x = Dh \times \sin(\text{gisement}) \text{ et } \Delta y = Dh \times \cos(\text{gisement})$$

$$\text{soit pour St 2 : } \Delta x = 71,607 \times \sin(297,863) = -71,567 \text{ mètres, et } \Delta y = -2,403 \text{ m.}$$

Connaissant les coordonnées (x_1, y_1) de St 1, le point de départ des visées, je peux en déduire les coordonnées des points visés : $x_v = x_1 + \Delta x$ et $y_v = y_1 + \Delta y$.

$$\text{Soit pour St 2 : } x_2 = x_1 + \Delta x = 1040,16 + (-71,567) = 968,593 \text{ mètres.}$$

Je note qu'en faisant cette opération pour la visée de St 1 vers St 25, je retrouve les coordonnées de St 25, à l'erreur de distance près (distance horizontale St 1 – St 25).

Faire le plan à l'échelle 1/1000

Reporter les résultats dans le tableau de St 2 pour retrouver les mesures manquantes faites à partir de cette station

Calculer par les coordonnées la surface délimitée par St 1, St 2, et St 3. (cf tableau)

Dans le tableau de St 2, on peut reporter les coordonnées (x, y et z) de St 1 et St 3.

Les variations d'abscisses (Δx) et d'ordonnées (Δy) sont obtenues en prenant les coordonnées du point visé et en déduisant celles de St 2.

Ex : pour la visée vers St 1, $\Delta x = x_1 - x_2 = 1040,160 - 1020,641 = 19,519$ mètres

Je remarque d'ailleurs que pour la visée St 2 -> St 1, j'ai le résultat inverse de la visée du tableau de St 1, de St 1 -> St 2.

La distance horizontale St 2 - St 1 est reportée à partir du tableau de St 1 (= distance St 1 - St 2 = 75,944 mètres).

La distance St 3 - St 2 se calcule en appliquant pythagore à partir des variations d'abscisse et d'ordonnée entre St 2 et St 3 : racine ($52,048^2 + 70,990^2$) = 88,026 mètres

Je remplace la valeur de l'angle vertical (303,347) qui correspond à la position « retournée » de la lunette par $400 - 303,347 = 96,653$ grades qui est l'angle zénithal, c'est-à-dire qui correspond à une visée montante.

Je reporte la hauteur tourillon comme première composante de la ligne de visée. A défaut de valeur pour St 2, je reprends la même valeur que pour St 1 : 1,56 mètre.

Connaissant la distance horizontale et l'inclinaison de la lunette, je peux calculer la dénivelée de la ligne de visée : $\Delta z = Dh \times \text{tg}(\alpha)$,

$75,944 \times \text{tg}(3,347) = 3,996$ mètres de St 2 à St 1,

et 0 de St 2 à St 3 puisque la lunette est réglée à l'horizontale.

De ces 2 composantes de la dénivelée et de l'altitude des 2 points, je peux déduire la dernière composante de la dénivelée, à savoir les lectures aux fils niveleurs :

$FN = \text{altitude du point de station} + Ht + \Delta z - \text{altitude du point visé}$,

soit pour la visée vers St 1 : $44,945 + 1,56 + 3,996 - 48,355 = 2,146$ mètres, soit 2146 mm.

Pour viser St 3, il faudrait une mire de 5 mètres (FN = 4907 mm) et le fil stadimétrique haut serait encore au-dessus de la mire. (le point St 2 est beaucoup plus haut que St 3).

Enfin, pour trouver les autres fils stadimétriques (FSH et FSB), il faut tenir compte de la distance mire-station, et de la pente : $FSH - FSB = Dh / 100 / (\cos(\alpha))^2$,

que je multiplie par 1000 ensuite pour avoir un résultat en mm.

La moitié de cet écart entre fil haut et fil bas sera :

- à ajouter au FN pour trouver FSH,

à soustraire au FN pour trouver FSB.

La visée St 2 -> St 1 a servi de référence en St 2 : l'angle horizontal a été réglé à 0.

Cette visée est opposée à une visée St 1 -> St 2 faite depuis St 1, dont le gisement est connu.

Il faut soustraire 200 gr à ce dernier gisement pour obtenir le gisement géographique St 2 -> St 1, soit 16,548 grades.

La visée St 2 -> St 3 matérialise une nouvelle direction.

Pour la situer, je peux utiliser les coordonnées comme je l'avais fait pour trouver le gisement géographique St 1 -> St 25 en début d'exercice. J'en déduirais l'angle horizontal lu en St 2.

Il est possible également de trouver la solution en travaillant sur le triangle (St1, St 2, St 3) dont tous les côtés sont connus.

L'angle A en St 2 peut être trouvé en utilisant la formule d'Al Kashi :

Posons :

- a = distance St 1 – St 3 = 71,607 m (tableau de St 1)
- b = distance St 2 – St 3 = 88,026 m
- c = distance St 2 – St 1 = 75,944 m

$$C = \arccos[(b^2 + c^2 - a^2) / (2 \times b \times c)] = 56,8 \text{ gr.}$$

L'angle lu à partir du réglage 0 de St 2 étant mesuré dans le sens topographique (sens des aiguilles d'une montre), il faut soustraire ce résultat à 400 pour trouver l'angle lu lors de la visée de St 2 à St 3, soit 343,2 gr.

Enfin (!), le gisement géographique de St 2 -> St 1 étant 16,548 gr et non 0 gr comme ce qu'indique le goniomètre du théodolite,

il faut ajouter 16,548 gr aux angles lus pour obtenir les gisements géographiques, soit pour le gisement géographique de St 2-> St 3 : $343,2 + 16,548 = 359,748 \text{ gr.}$

Le calcul de la surface par les coordonnées est fait en totalisant 3 produits (i=1 à i=3) :

- soit par point : pour chaque point, on multiplie son abscisse par la différence d'ordonnée entre le point suivant et le point précédent et on divise par 2 : $x_i \times (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2$
- soit par segment : pour chaque segment, on multiplie la différence des abscisses par la moyenne des ordonnées : $(x_{i+1} - x_i) \times (y_{i+1} + y_i) / 2$

soit, en conservant la valeur absolue du résultat :

- valeur absolue $[(-36920) + (-1227) + (35544)] = 2603 \text{ m}^2$
- valeur absolue $[(-38847) + (-103525) + (144975)] = 2603 \text{ m}^2$

Nota, connaissant un angle (en St 1 : $297,863 - 216,548 = 81,315 \text{ gr}$) et les 2 côtés adjacents à cet angle (St 1 – St 2 d'une part = 75,944 m ; St 1 – St 3 d'autre part = 71,607 m), il est possible d'appliquer la formule $S = a b \sin(C)/2$.